§7 保形变换

(1) 解析函数的几何性质

(2) 保形变换的常见例子

(3) 任两个正常边界的单连域存在保形变换

§7.1 解析函数的几何性质

一、解析函数的性质

Thm 1. 设 $f(z)$ 在 D 上单叶解析，则 $f'(z)\neq 0$.

Pf. 若 $\exists z_0\in D$ s.t. $f'(z_0)=0$，则 z_0 是 $f(z)-f(z_0)$ 的 n 级零点，$(n\geq 2)$，

z_0 也是 $f'(z)$ 的零点. 由零点的孤立性知，

$\exists\rho$ 很小，在 $|z-z_0|\leq\rho$ 上 $f(z)-f(z_0)$，$f'(z)$ 都只有 z_0 一个零点.

记 $\min\limits_{|z-z_0|=\rho}|f(z)-f(z_0)|=\delta>0$，取 $|a|<\delta$

由 Rouché，$f(z)-f(z_0)$ 与 $f(z)-f(z_0)-a$ 在 $|z-z_0|<\rho$ 内有同样多的零点，记作 $a_1,\cdots,a_n$. 使 $f(a_i)=f(z_0)+a$.

在 $|z-a|<\rho$ 内 $f'(z)\neq 0$，即 $f'(a_i)\neq 0$，a_i 是 $f(z)-f(z_0)-a$ 的一级零点，故 a_i 互不相等，与 $f(z)$ 在 D 上单叶解析矛盾.

Rem. Thm 1. 逆命题不成立. 反例：$f(z)=e^z$，$f'(z)\neq 0$，而 $f(z)$ 是周期函数

Thm 2. 设 $f(z)$ 在区域 D 内解析且 $\exists z_0\in D$ s.t. $f'(z_0)\neq 0$.

则 $f(z)$ 在 z_0 某邻域内单叶.

Pf. $f(z)-f(z_0)$ 以 z_0 为一级零点，由零点孤立性，$\exists\rho$ s.t.

在 $|z-z_0|\leq\rho$ 上 $f(z)-f(z_0)$ 只有 z_0 一个零点.

记 $\min\limits_{|z-z_0|=\rho}|f(z)-f(z_0)|=\delta>0$，$f(z_0)=w^*$，取 $m>0$ s.t. $m<\delta$，

对 $|w-w^*|<m$ 的 w，由 Rouché，在 $|z-z_0|<\rho$ 内

$f(z)-f(z_0)$ 与 $f(z)-f(z_0)-w+w^*=f(z)-w$ 有同样零点.

即 w^* 的 m 邻域内任一 w 都在 $|z-z_0|<\rho$ 内有原像 z s.t. $f(z)=w$.

由 $f(z)$ 在 z_0 的连续性，$\exists$ z_0 的某邻域 u：$|z-z_0|<r<\rho$ s.t. $f(u)$ 全落在 w^* 的 m 邻域内，此时 $f(z)$ 在 u 上单叶.

二、解析函数的保域性

Thm 3. 设 $f(z)$ 在区域 D 上解析非常数，则其像集 $G=f(D)$ 也是区域

Pf. (1) 先证 $G=f(D)$ 中每个点都是内点，任取一点 $w^*\in f(D)$，

记 $f(z_0)=w^*$，$f(z)-f(z_0)$ 以 z_0 为零点，由零点孤立性，

$\exists\, \rho$ s.t. $f(z)-f(z_0)$ 在 $|z-z_0|\le\rho$ 上没有除 z_0 外的其他零点.

记 $\min\limits_{|z-z_0|=\rho}|f(z)-f(z_0)|=\delta>0$，取 $m>0$ s.t. $m<\delta$，对 $|w-w^*|<m$，

由 Rouché，在 $|z-z_0|<\rho$ 上 $f(z)-f(z_0)$ 与 $f(z)-f(z_0)-w+w^*$ 有同样多的零点，即 w^* 的 m 邻域中每个 w 都是 $w=f(z)$ 的像.

表明 w^* 是 $f(D)$ 的内点，进而 $f(D)$ 是开集.

(2) 下证 $f(D)$ 连通：任取 $w_1, w_2\in f(D)$，对应 $z_1, z_2\in D$ s.t. $f(z_1)=w_1$，$f(z_2)=w_2$，记 C 是 D 内连接 z_1 与 z_2 的折线，

C 在变换 $w=f(z)$ 下的像曲线 $\Gamma=f(C)$ 是连续曲线且 $\Gamma\subset f(D)$.

由 (1)，$\Gamma=f(C)$ 都是 $f(D)$ 内点，$\exists$ G_1 为 $f(D)$ 子区域，

$\Gamma=f(C)\subset G_1$，于是在区域 G_1 内可作 w_1, w_2 间折线

即 w_1, w_2 可由折线连通，$f(D)$ 为区域

Cor. 最大模原理

若 ~~f(z)~~ $f(z)$ 在区域 D 解析，则 $|f(z)|$ 取不到最大值.

Pf. 由 Thm 3. 保域性可知.

三、导数的几何意义

设 $f(z)$ 在 z_0 解析，且 $f'(z_0)=Re^{i\theta}\neq 0$

1. 导数辐角 θ 的几何意义

设 C 是从 z_0 出发的光滑曲线，$C: z(t)$，$z(t_0)=z_0$，$z'(t_0)$ 表示 C 在 z_0 的切向量.

C 在变换 $w=f(z)$ 下的像曲线：$\Gamma=f(C)$，$w=w(t)=f(z(t))$.

$w(t_0)=f(z_0)$，$w'(t_0)$ 是 Γ 的切向量，则有：

$\arg w'(t_0)=\arg f'(z_0)+\arg z'(t_0)$，即像曲线切线角等于原像曲线切线角又增加 $\theta=\arg f'(z_0)$.

这里 $\theta=\arg f'(z_0)$ 称为 $w=f(z)$ 在 z_0 的旋转角.

进而有，过 z_0 两条曲线夹角在变换 $w=f(z)$ 下所得像曲线夹角的大小、方向均不变.（保角性）

2. 导数模 R 的几何意义

$|f'(z_0)|=\lim\limits_{\Delta z\to 0}\dfrac{|\Delta w|}{|\Delta z|}=R$ 表示自 z_0 出发的无穷小长度的曲线与对应的无穷小长度的像曲线的弧长之比，R 称为变换在该点的伸缩率.（保伸缩率）

四、保形变换

Def 1. 设 $f(z)$ 在 z_0 邻域内连续，且变换 $w=f(z)$ 在 z_0 点保角且保伸缩率，则称变换 $w=f(z)$ 在 z_0 保形

Def 2. 若变换 $w=f(z)$ 在区域 D 上处处保角，则称变换 $w=f(z)$ 在区域 D 上保角.

Def 3. 若变换 $w=f(z)$ 在区域 D 上单叶保角，则称变换 $w=f(z)$ 是 D 上的保形变换（共形映射）

Cor 2. (1) 单叶解析变换一定是保形变换 ($f'(z) \neq 0$ 保角、保伸缩率)

(2) 单叶解析变换逆变换也是保形变换.

*Thm 4. (Cor 2. 的逆命题)

区域 D 上的保形变换 $w=f(z)$ 一定是解析函数对应的变换.

Rem. 保角变换中保角性可以推出保伸缩性.